Exercice 1

Les résultats seront approchés à 10^{-4} près.
Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 et de 1, appelés bits. Une suite de 8 bits est appelée octet.
Par exemple 10010110 est un octet.

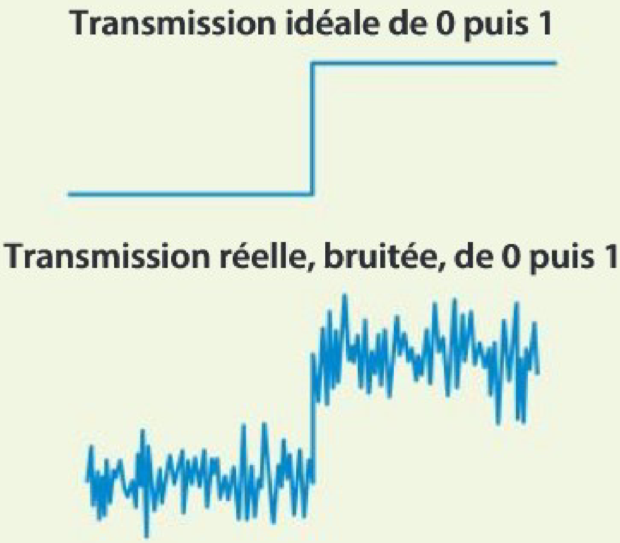
Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie successivement 8 bits qui forment un octet. On suppose que la transmission d'un bit est indépendante de transmission des bits précédents, et on admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est 0,01.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bits mal transmis dans un octet.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à 3 est négligeable » ? Argumenter la réponse.

Partie B

Les erreurs de transmission de bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure ci-dessous.



On admet que l'information d'un bit reçu incluant le bruit peut être modélisée par une variable aléatoire dont l'espérance est la valeur du bit envoyé. Cette information brouillée est ensuite débruitée pour retrouver le signal envoyé.

Si on envoie un bit de valeur 1, cette variable aléatoire, notée R, a pour espérance 1 et pour variance 0,09.

On considère que le bit reçu n'est pas bien interprété si $R \leqslant 0,4$.

1. Donner une majoration de $P(|R-1| > 0,6)$.

2. On suppose que la loi de R est symétrique par rapport à 1, c'est-à-dire que :

$$P(R \leqslant 0,4) = P(R \geqslant 1,6).$$

En déduire une majoration de $P(R \leqslant 0,4)$.

Exercice 2

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;

Text

- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

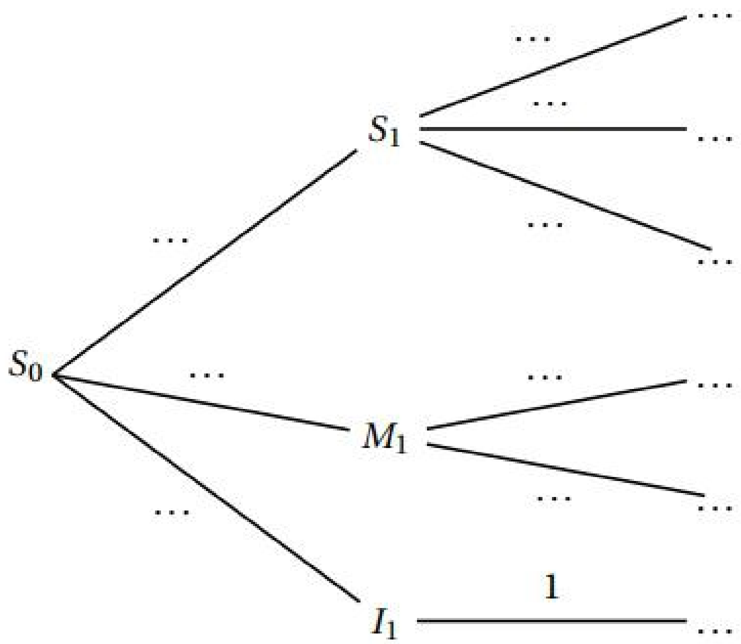
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \; ; \; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0{,}65 v_n + 0{,}05 u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n)?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?

Exercice 3

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « Amélie est arrêtée par le $n^{\text{ième}}$ feu rouge ou orange » et $\overline{E}_n$ l'événement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E}_n$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- La probabilité que le $(n+1)^{e}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{e} feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- La probabilité que le $(n+1)^{e}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{e} feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré page suivante.

b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

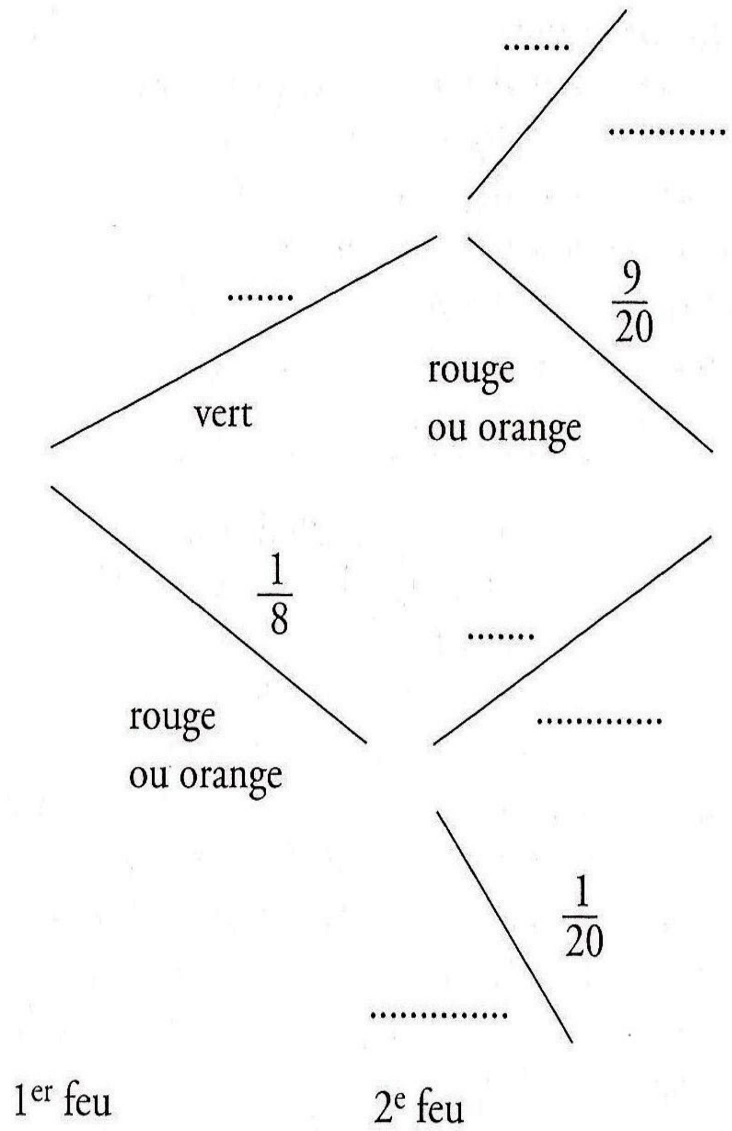
2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{E_n}(E_{n+1})$ et $p_{\overline{E}_n}(E_{n+1})$.

b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}\, p_n + \frac{9}{20}\, q_n.$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.



3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.